

Matematica per la Fisica

Docente: Silvia Penati

Prova Scritta del 24/7/2009

Problema 1

Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1+ix}{1+5x^2}$$

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(z) = \frac{3z^2 + 9z}{z^3(z+1)(z^2-9)} \sin\left(\frac{i}{(z+1)^2}\right)$$

- 1) Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- 2) Si calcoli il residuo per ciascuno dei poli identificati nel punto precedente.
- 3) Si calcoli la parte principale nello sviluppo in serie di Laurent di f attorno ai poli.

Problema 3

Si consideri l'operatore A definito su uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di cui sia nota una base numerabile o.n. completa $\{e_n\}_{n=0,1,\dots}$. Data f in \mathcal{H} ($f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$), l'azione di A è così definita

$$(Af) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n e_n$$

- 1) A è un operatore limitato?
- 2) Si scriva la rappresentazione matriciale di A sulla base $\{e_n\}$
- 3) Si studino proprietà di autoaggiuntezza e si determini lo spettro dell'operatore

Problema 4

Si calcolino i seguenti integrali

$$a) \int_{|z|=e} \frac{e^z}{(z+3)^3(z-1)} \quad b) \int_{|z|=\pi} \frac{\cos(z)}{(z+i)(z+2)(z+3)(z-2ie)^2}$$

$$c) \int_{|z|=\sqrt{5}} \frac{1}{(z+2)^2(z-2)^2}$$

Problema 5

Si scriva una funzione f reale di variabile reale tale che

$$1) f(x) \in L^2[-1, 1] \quad \text{e} \quad f(x) \notin L^2[-2, 2]$$

$$2) f(x) \in L^3[0, 1] \quad \text{e} \quad f(x) \notin L^2[-2, 2]$$

$$3) f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad f(x) \notin L^2(\mathbb{R})$$

$$4) f(x) \in L^2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad f(x) \notin L^1(\mathbb{R})$$

Problema 6

Si consideri lo spazio di Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ e su di esso la base di Hermite $\{e_n\}_{n=0,1,\dots}$ definita da

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

Si consideri la funzione $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ definita da

$$f(x) = (2x^4 + 4x^2 + x + 3) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

1) Dimostrare che $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

2) Su quali vettori della base di Hermite f ha componenti non nulle?

3) Calcolare i coefficienti dello sviluppo di f sulla base di Hermite.